09-05-17

Άσκηση (1)

Βρείτε τις εφαπτόμενες της καμπύλης $V((x^2-y^2)^2+(2x^2-6y^2)z^2)$ C $\mathbb{P}^2$ στο σημείο της $(0,0,1)$ ως ιδιόμορφο.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)y+\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)z=0$$

$(x^2-y^2)^2+(2x^2-6y^2)z^2=0$ αποομογενοποιώ

Θέτοντας $z=1$ $(x^2-y^2)^2+(2x^2-6y^2)=0$

Θέλουμε να βρούμε τις εφαπτόμενες στο σημείο $(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2(x^2-y^2)^{2-1}\cdot 2x+4x=\dots=4x^3-4xy^2+4x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2(x^2-y^2)(-2y)-12y=\dots=-4x^2y+4y^3-12y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Πάω στην δεύτερη παράγωγο.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=12x^2-4y^2+4$$

(στο σημείο (0,0) έχω σταθερό όρο, δεν χρειάζεται να κοιτάξω την τρίτη παράγωγο)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-4x^2+12y^2-12$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-8xy$$

Εφαπτόμενες στο σημείο $(0,0)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)(x-0)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)(x-0)(y-0)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)(y-0)^2=$$

$= 4x^2 + 0 - 12y^2 = 4(x^2 - 3y^2) = 4(x - \sqrt{3}y)(x + \sqrt{3}y)$.

Συνεπώς, οι εφαπτόμενες στο σημείο $(0,0)$ είναι οι εξής:
$V(x - \sqrt{3}y)$, $V(x + \sqrt{3}y)$.

! Ομογενοποιώ για να πάω από ευθεία του επιπέδου σε ευθείες του προβολικού επιπέδου.

Εφαπτόμενες στο $(0,0,1)$ είναι οι εξής:
$V(X - \sqrt{3}Y)$, $V(X + \sqrt{3}Y)$

□

Άσκηση ②

Βρείτε τις εφαπτόμενες της καμπύλης
$V((x^2 - y^2)^2 + (2x^2 - 6y^2)z^2) \subset \mathbb{P}^2$ στο σημείο $(1,1,0)$

Αποομογενοποιώ θέτοντας $y = 1$ (ή $x = 1$), διότι το $z = 0$.
Η καμπύλη μου γίνεται: $V((x^2 - 1)^2 + (2x^2 - 6)z^2)$
Ψάχνω τις εφαπτόμενες στο σημείο $(1,0)$ (βρίσκομαι στο επίπεδο xz)

Θα χρησιμοποιήσω κανόνα της αλυσίδας.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x^2 - 1)2x + 4xz^2 = \dots = 4x^3 - 4x + 4xz^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2(2x^2 - 6)z = \dots = 4x^2 z - 12z$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial z}(1,0)$$

Κοιτάω την δεύτερη παράγωγο.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 4 + 4z^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 4x^2 - 12$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 8xz$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x}(1,0)(x-1)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(1,0)(x-1)(z-0) + \frac{\partial^2 f}{\partial z}(1,0)z^2 = 0$$

$\Rightarrow \quad 8(x-1)^2 + 0 - 8z^2 = 0$

Οι εφαπτόμενες στο σημείο $(1,0)$ είναι:

$V(x-1-z)$, $V(x-1+z)$

Ομογενοποιώ ως προς Y.

$V(X-Y-Z)$ & $V(X-Y+Z)$

□

$V(f(x,y)) \subset K^2$ $\quad V(F(X,Y,Z)) \subset P_K^2$

Ορισμός: Η ευθεία $V(ax+by+\gamma)$ του επιπέδου K^2 που η αντίστοιχη της $V(aX+bY+\gamma Z)$ στο προβολικό επίπεδο είναι εφαπτόμενη της $V(F)$ σε σημείο της $V(f)$ στο άπειρο λέγεται <u>ασύμπτωτη</u> της $V(f)$.

Ασύμπτωτες της $V(F)$

$V(f) \xrightarrow[\text{ομογενοποιώ}]{} V(F)$

Βρίσκουμε τα σημεία στο άπειρο.

$Z=0$

$F(X,Y,Z)=0$ και σε κάθε ένα από αυτά βρίσκω τις εφαπτόμενες. Αν $aX+bY+\gamma Z=0$ με $(a,b) \neq (0,0)$ τότε η $ax+by+\gamma=0$ είναι μια ασύμπτωτη της f.

Η παραβολή είναι η μοναδική δευτεροβάθμια καμπύλη που δεν έχει ασύμπτωτη

Παρατήρηση

¥ Άσκηση ①

Βρείτε (αν ∃) τις ασύμπτωτες της $V(x^2-4y^2+2x-4y+13)$

— * —

Ομογενοποιώ.

$$X^2-4Y^2+2XZ-4YZ+13Z^2=0$$

Βρίσκουμε τα σημεία στο άπειρο

$$\left.\begin{array}{l} X^2-4Y^2+2XZ-4YZ+13Z^2=0 \\ Z=0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} X^2-4Y^2=0 \\ Z=0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} X-2Y=0 \\ Z=0 \end{array} \quad \text{ή} \quad \begin{array}{l} X+2Y=0 \\ Z=0 \end{array}$$

- $X-2Y=0$
  $Z=0$
  $(2,1,0)$

Έχω άπειρα σημεία, συνήθως θα βάζω μια από τις 2 συν/νες $=1$.

Σχόλιο

- $X+2Y=0$
  $Z=0$

$(-2,1,0)$

Εφαπτόμενες στα σημεία $(2,1,0)$ και $(-2,1,0)$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x+2z$$

Τα σημεία είναι απλά

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,1,0)\neq 0 \neq \frac{\partial f}{\partial x}(-2,1,0)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-8y-4z$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=2x-4y+26z$$

Εφαπτόμενη στο σημείο $(2,1,0)$

$$4X-8Y+0Z=0$$

Εφαπτόμενη στο σημείο $(-2,1,0)$

$-4x-8y-8z=0$

Οι εφαπτόμενες που βρήκα είναι στο προβολικό επίπεδο. Εγώ γράφω τις ασύμπτωτες, οι οποίες είναι στο επίπεδο.

Προσοχή

Για να βρω τις ασύμπτωτες αποομογενοποιώ

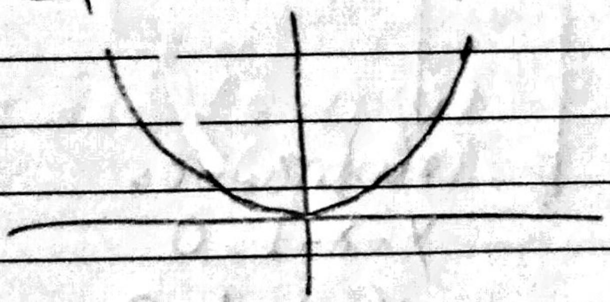
$z=1$ $\quad$ $4x-8y=0$

$-4x-8y-8=0$

□

Άσκηση 2

Βρείτε (αν υπάρχουν) τις ασύμπτωτες της $V(x^2-y)$



$$\begin{cases} x^2-yz=0 \\ z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2=0 \\ z=0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$\Rightarrow$ Σημείο στο άπειρο $(0,1,0)$

Εφαπτόμενη στο $(0,1,0)$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-z$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=-y$$

$0x+0y-1z=0 \Rightarrow z=0$, δεν αντιστοιχεί σε ευθεία στο (x,y) επίπεδο

Αυτό σημαίνει, ότι η παραβολή δεν έχει ασύμπτωτη.

□

Άσκηση (5)

Βρείτε (αν έχει) τις ασύμπτωτες της $V((x^2-y^2)^2+(2x^2-6y^2))$

Ομογενοποιώ: $(x^2-y^2)^2+(2x^2-6y^2)z^2=0$

Σημεία στο άπειρο

$$\left.\begin{array}{l}(x^2-y^2)^2+(2x^2-6y^2)z^2=0\\ z=0\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (x-y)^2(x+y)^2=0, \quad z=0$$

Τα σημεία είναι $(1,1,0)$ και $(-1,1,0)$

Εφαπτόμενες στο $(1,1,0)$ και στο $(-1,1,0)$

- $(1,1,0)$ οι εφαπτόμενες: $y-x+z=0$

  $y-x+z=0$

- $(-1,1,0)$ οι εφαπτόμενες

  $\downarrow$

  με τον ίδιο τρόπο

$\downarrow$

ασύμπτωτες

$y-x+1=0$

$y-x-1=0$

Άσκηση (4)

Βρείτε τα σημεία καμπής της κυβικής $V(x^3+y^3-3xyz) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$

— * —

$H_F=0$ Τα σημεία καμπής είναι μη ιδιόμορφα
$F=0$ σημεία της καμπύλης $V(F)$ που μηδενί-
ζουν την H_F.

Ιδιόμορφα σημεία της F.

$\frac{\partial F}{\partial x}=0 \qquad 3x^2-3yz=0$

$\frac{\partial F}{\partial y}=0 \qquad 3y^2-3xz=0$

$\frac{\partial F}{\partial z}=0 \qquad -3xy=0 \Rightarrow x=0$ ή $y=0$

1η περίπτωση

$x=0 \qquad -3yz=0 \qquad (0,0,\overset{\neq 0}{z})$ θέτω $z=1$

$3y^2=0 \qquad (0,0,1)$

$x=0$

2η περίπτωση

$y=0 \qquad 3x^2=0 \qquad (0,0,1)$

$-3xz=0$

$y=0$

Το ιδιόμορφο σημείο της F είναι μόνο το σημείο $(0,0,1)$

Βρίσκω την δεύτερη παράγωγο

$$H_F = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & -3z & -3y \\ -3z & 6y & -3x \\ -3y & -3x & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \cdots = -54(x^3+y^3+xyz)$$

Λύνω το σύστημα $H_F=0$
$F=0$

Επομένως έχουμε

$$\begin{cases} x^3+y^3+xyz=0 \\ x^3+y^3-3xyz=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3+y^3-3xyz=0 \\ 4xyz=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$x=0$ ή $y=0$ ή $z=0$

1η περίπτωση: $x=0$ $y^3=0 \Rightarrow y=0$
το z δεν προσδιορίζεται, οπότε μπορώ να βάλω οτιδήποτε, εκτός από μηδέν. π.χ. $z=1$
$(0,0,1)$ είναι ιδιόμορφο, άρα δεν είναι σημείο καμπής.

2η περίπτωση: $y=0$ $x^3=0 \Rightarrow x=0$
το z παίρνει και πάλι οποιαδήποτε
π.χ. $z=1$ $(0,0,1)$ είναι ιδιόμορφο, άρα δεν είναι σημείο καμπής.

3η περίπτωση: $z=0$ $x^3+y^3=0 \Rightarrow z=0, (x+y)(x^2-xy+y^2)=0$

$(x+y)(x^2-xy+y^2)=0 \Rightarrow (x+y)(x-\rho_1 y)(x-\rho_2 y)=0$

Βρίσκω τα ρ_1, ρ_2

x^2-x+1 $\rho_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1-4}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

$(-1,1,0)$ $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}, 1, 0\right)$ $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}, 1, 0\right)$

και τα 3 σημεία είναι διαφορετικά του σημείου $(0,0,1)$.
Συνεπώς, τα 3 σημεία που βρήκα είναι σημεία καμπής.
Επιπλέον, ανήκουν στην ίδια ευθεία.

$\square$

Άσκηση (5)

Βρείτε τα σημεία καμπής της κυβικής του Fermat $V(x^3+y^3-z^3) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

— ∗ —

Βρίσκουμε τα ιδιόμορφα σημεία

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 = 0 \qquad x=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 = 0 \qquad y=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -3z^2 = 0 \qquad z=0$$

Όμως $(0,0,0) \notin \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

Συμπέρασμα: Η καμπύλη $V(F)$ δεν έχει ιδιόμορφα σημεία.

Λύνω το σύστημα $\begin{cases} F=0 \\ H_F=0 \end{cases}$

$$F = x^3+y^3-z^3$$

$$H_F = \begin{vmatrix} 6x & 0 & 0 \\ 0 & 6y & 0 \\ 0 & 0 & -6z \end{vmatrix} = \dots = -6^3xyz$$

Το σύστημα γίνεται: $\begin{cases} x^3+y^3-z^3=0 \\ -6^3xyz=0 \end{cases}$

$\hookrightarrow x=0$ ή $y=0$ ή $z=0$

Αν λύσω το σύστημα θα βρω 9 σημεία καμπής $\overset{\nabla}{\circ}$

Τα οποία είναι τα εξής:

$(0,-1,1)$, $(0,-\omega,1)$, $(0,-\omega^2,1)$

$(-1,0,1)$, $(-\omega,0,1)$, $(-\omega^2,0,1)$

$(1,-1,0)$, $(\omega,-1,0)$, $(\omega^2,-1,0)$

όπου ω είναι μια αρχική κυβική ρίζα της μονάδας

$$\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

Τα σημεία $(0,1,1)$ $(1,0,1)$ $(1,-1,0)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα $\Rightarrow$ ανήκουν στην ίδια ευθεία.

$(0,\omega,1)$, $(\omega,0,1)$ $(\omega,-1,0)$ $\Gamma \in \Rightarrow \in$ ίδια ευθεία

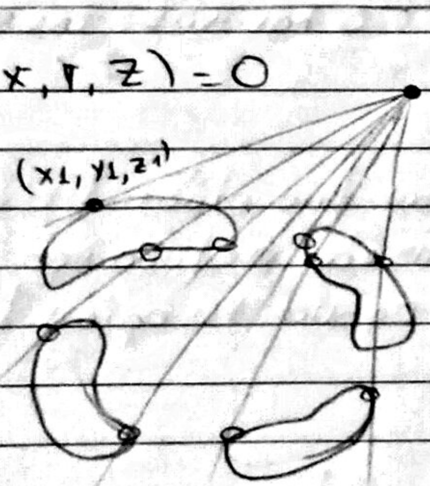
Έχω 12 ευθείες $\overset{\nabla}{\circ}$ $\overset{\nabla}{\circ}$

Ανά 3 τα σημεία ανήκουν στην ίδια ευθεία $\overset{\nabla}{\circ}$

$\square$

* — * — *

$F(x,y,z)=0$ (a,b,γ)



$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_1,y_1,z_1)X + \frac{\partial F}{\partial y}(x_1,y_1,z_1)Y + \frac{\partial F}{\partial z}(x_1,y_1,z_1)Z = 0$$

$F(x_1,y_1,z_1)=0$ ← m βαθμού

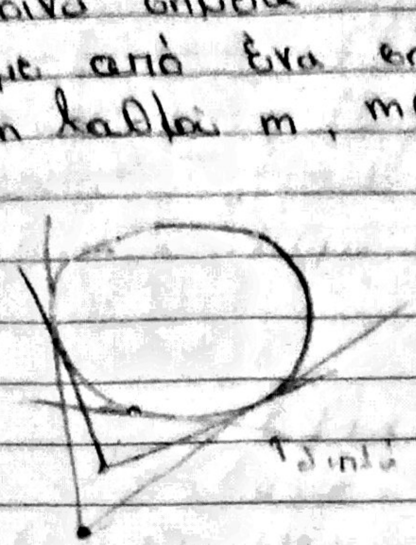
$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_1,y_1,z_1)a + \frac{\partial F}{\partial y}(x_1,y_1,z_1)b + \frac{\partial F}{\partial z}(x_1,y_1,z_1)\gamma = 0$$

↑ m-1 βαθμού

m(m-1) κοινά σημεία

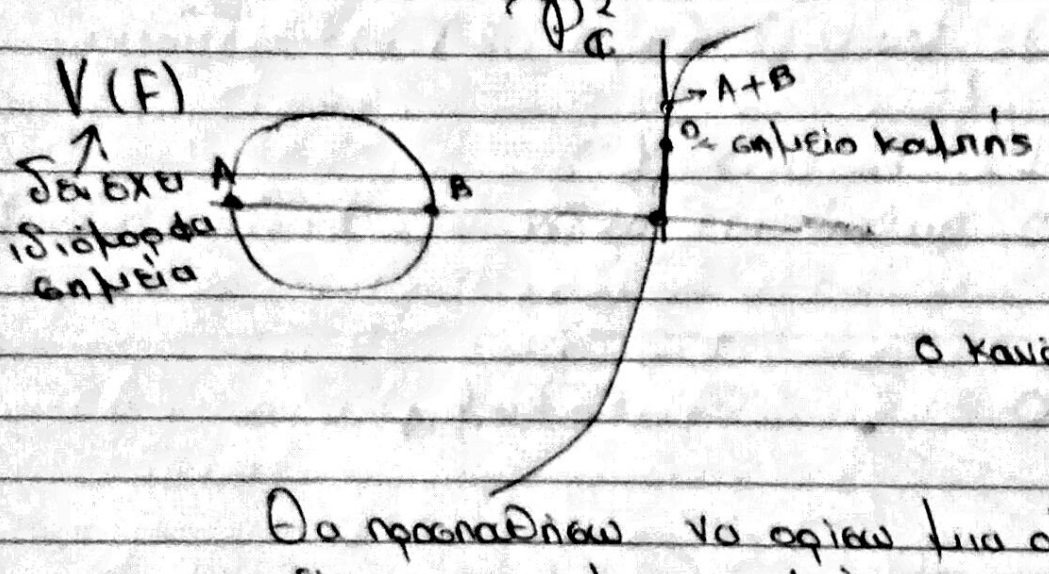
Γενικά, έχουμε από ένα σημείο του επιπέδου προς μια καμπύλη βαθμού m, m(m-1) εφαπτομένες

Π.χ.



όσο πλησιάζω το σημείο αναμένω να έχω 2 εφαπτομένες. Όταν πέσει πάνω στο κύκλο, θα έχω ακόμα 2 εφαπτομένες

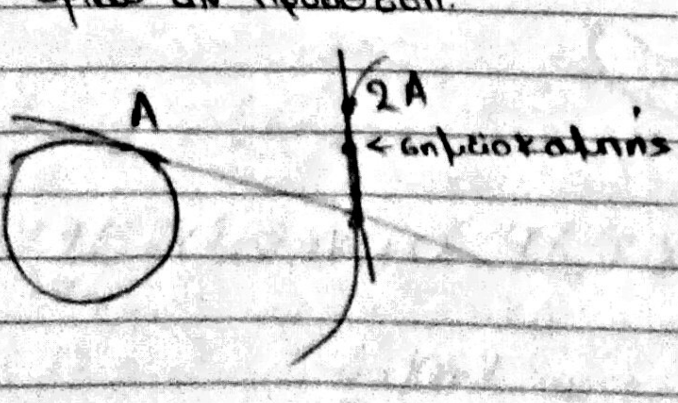
ΤΙ ΘΑ ΚΑΝΟΥΜΕ ΣΤΟ ΕΠΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ



Ο κανόνας της χορδής

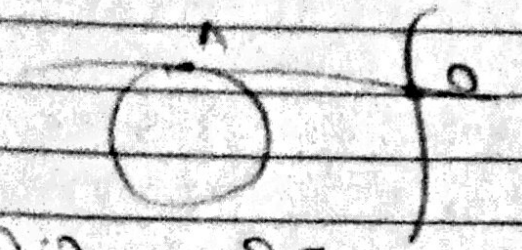
Θα προσπαθήσω να ορίσω μια ομάδα με στοιχεία να είναι τα σημεία καμπής ....

Για να έχω μια ομάδα πρέπει να ορίσω μια πράξη, θα ορίσω την πρόσθεση.



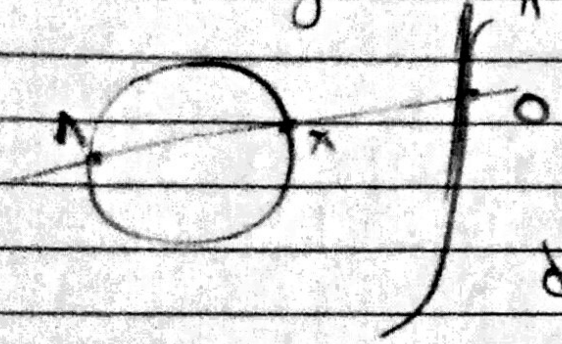
$A+B=B+A$

∃ ουδέτερο στοιχείο και είναι το σημείο καλής



$A + O = A$

Θέλω να δείξω ότι έχει αντίθετο.

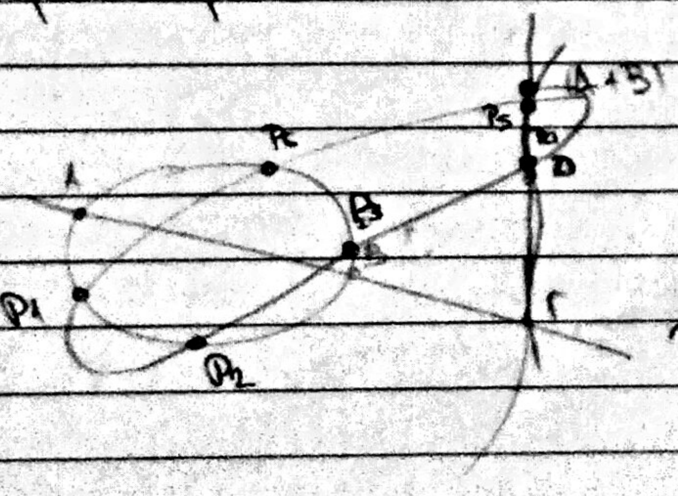


Έστω Χ το αντίθετο του Α. Θέλω να βρω πόσο κάνει Α + Χ. Κάνω την κατασκευή

Φέρνουμε ευθεία από το Α,Χ στο Ο και από την Ο στην Ο όλο επανάληψη.

Άρα, $A + X = O$

προσεταιριστική $(A+B)+\Gamma = A+(B+\Gamma)$



$A+B+\Gamma=O$

3 σημεία στην ίδια ευθεία

$P_1+P_2+P_3+P_4+P_5+P_6=O$